TEMA 4.

1.– Se lanzan dos dados; sea "X" la diferencia de los nºs que muestran el mayor menos el menor, 0 en caso de empate. Hallar la función de probabilidad de X.

Hallo la función de probabilidad de X.

Los valores que puede tomar la variable aleatoria X son:

$x_1 = 0$ {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}

$x_2 = 1$ {(1,2), (2,1) (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)}

$x_3 = 2$ {(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4)}

$x_4 = 3$ {(1,4), (4,1), (2,5), (5,2), (3,6), (6,3)}

$x_5 = 4$ {(1,5), (5,1), (2,6), (6,2)}

$x_6 = 5$ {(1,6), (6,1)}

Casos posibles: $VR_6^2 = 36$ (36 combinaciones distintas)

$$\left.\begin{array}{l} P(X=x_1) = 6/36 \\ P(X=x_2) = 10/36 \\ P(X=x_3) = 8/36 \\ P(X=x_4) = 6/36 \\ P(X=x_5) = 4/36 \\ P(X=x_6) = 2/36 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum P(x_i) = 1;\ f(x) \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1/6 \\ x_2 = 5/18 \\ x_3 = 2/9 \\ x_4 = 1/6 \\ x_5 = 1/9 \\ x_6 = 1/18 \end{array}\right.$$

2.– Tres personas arrojan una moneda al aire. El juego continúa hasta que alguna de ellas obtenga un resultado diferente al de las otras dos. La persona que obtenga un resultado diferente gana. Sea X el número de tiradas necesarias antes de acabar el juego. Hallar la función de probabilidad de X.

Hallo la función de probabilidad de X.

"X" → número de veces que se lanza la moneda.

→ Probabilidad de parar: casos posibles: $VR_2^3 = 2^3 = 8$

casos favorables: parar: $(x, \bar{c}, \bar{c})$, (c, x, c) $\Big\}$ $PR_3^{2,1} + PR_3^{2,1} = 2PR_3^{2,1}$

1. (2 caras + 1 cruz) (2 cruces + 1 cara)

A_1: parar tras la 1ª tirada.
$\bar{A}_1$: no parar tras la 1ª tirada. } lo mismo con las sucesivas tiradas.

$P(A_1) = 6/8 = 3/4$

$P(\bar{A}_1) = 1 - 3/4 = 1/4$

Posibles valores de la variable aleatoria X.

X

1 $\rightarrow P(A_1) = 3/4$

2 $\rightarrow P(A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = 1/4 \cdot 3/4$

3 $\rightarrow P(A_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = (1/4)^2 \cdot 3/4$

4 $\rightarrow P(A_4) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot P(A_4) = (1/4)^3 \cdot 3/4$

⋮

n $\rightarrow P(A_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \ldots P(A_n) = (1/4)^{n-1} \cdot 3/4$

$$f(x_i) \begin{cases} x_1 = 3/4 \\ x_2 = 1/4 \cdot 3/4 \\ x_3 = 1/16 \cdot 3/4 \\ \vdots \\ x_n = 1/4^{n-1} \cdot 3/4 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \cdot \frac{3}{4}}$$

3.- Sea 0'8 la probabilidad de que resulten perfectas las piezas producidas en una factoría. Realicemos 3 extracciones aleatorias entre todas las piezas producidas en una semana cualquiera. Sea la variable aleatoria "X" (número de piezas defectuosas en las 3 extracciones). Sea la variable aleatoria "Y" con valores posibles: 3 (si las todas piezas son perfectas o defectuosas); 2 (si dos piezas extraídas consecutivas son perfectas o defectuosas); 1 (si tiene lugar cualquier otro valor ≠ del anterior)

Calcular los valores de la distribución conjunta de "X" y de "Y", los valores de la distribución condicional de "X" y los valores de la distribución condicional de "Y".

P: que la pieza resulte perfecta: $P(P) = 0'8$

D: " " " " defectuosa: $P(D) = P(\bar{P}) = 1 - 0'8 = 0'2$

Extraemos 3 piezas, independientes, importa el orden.

Casos posibles: $VR_2{}^3 = 2^3 = 8$.

"X": numero de piezas defectuosas:

X

0 $\{(P,P,P)\}$

1 $\{(D,P,P),(P,D,P),(P,P,D)\}$

2 $\{(D,D,P),(P,D,D),(D,P,D)\}$

3 $\{(D,D,D)\}$

Y

3 $\{(D,D,D),(P,P,P)\}$

2 $\{(D,D,P),(P,D,D),(P,P,D),(D,P,P)\}$

1 $\{(P,D,P),(D,P,D)\}$

1º Hallo los valores de distribución de "X":

$g(x_1) = P(X=0) = 0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'8 = 0'512$

$g(x_2) = P(X=1) = 0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'2 \cdot PR_3^{2,1} = 0'384$

$g(x_3) = P(X=2) = 0'8 \cdot 0'2 \cdot 0'2 \cdot PR_3^{2,1} = 0'096$

$g(x_4) = P(X=3) = 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'2 = 0'008$

$\Sigma = 1$

2º Hallo los valores de distribución de "Y".

$h(Y_1) = 0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'8 + 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'2 = 0'52$

$h(Y_2) = (0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'8) \cdot 2 + (0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'2) \cdot 2 = 0'32$

$h(Y_3) = (0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'2) + (0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'8) = 0'16$

$\Sigma = 1.$

1º Compruebo si "x" e "y" son independientes.

y \ x	1	2	3	h(y)
2	3/20	3/20	3/20	9/20
1	1/20	1/20	1/20	3/20
g(x)	4/20	4/20	4/20	12/20

=> No es 1

"X" e "Y" son independientes.

y \ x	1	2	3	h(y)
2	3/12	3/12	3/12	9/12
1	1/12	1/12	1/12	3/12
g(x)	4/12	4/12	4/12	1

$f(1,2) = 3/12 \neq g(x_1) \cdot h(y_1) = 4/12 \cdot 9/12$

2º Definimos las variables aleatorias $V = x+y$ y $W = 2x - y$

$V_{11} = 1+1 = 2$, $P(V_{11}) = P(V=2) = f(x_1, y_1) = 1/12$

$V_{12} = 1+2 = 3$; $P(V_{12}) = P(V=3) = f(x_1, y_2) = 3/12$

$V_{21} = 2+1 = 3$; $P(V_{21}) = P(V=3) = f(x_2, y_1) = 1/12$

$V_{22} = 2+2 = 4$; $P(V_{22}) = P(V=4) = f(x_2, y_2) = 3/12$

$V_{31} = 3+1 = 4$; $P(V_{31}) = P(V=4) = f(x_3, y_1) = 1/12$

$V_{32} = 3+2 = 5$; $P(V_{32}) = P(V=5) = f(x_3, y_2) = 3/12$

$\Sigma = 1$

$W_{11} = 2-1 = 1$; $P(W_{11}) = P(W=1) = f(x_1, y_1) = 1/12$

$W_{12} = 0$; $P(W_{12}) = P(W=0) = f(x_1, y_2) = 3/12$

$W_{21} = 4-1 = 3$; $P(W_{21}) = P(W=3) = f(x_2, y_1) = 1/12$

$W_{22} = 4-2 = 2$; $P(W_{22}) = P(W=2) = f(x_2, y_2) = 3/12$

$W_{31} = 6-1 = 5$; $P(W_{31}) = P(W=5) = f(x_3, y_1) = 1/12$

$W_{32} = 6-2 = 4$; $P(W_{32}) = P(W=4) = f(x_3, y_2) = 3/12$

$\Sigma = 1$

w \ v	2	3	4	5	h(y)
0	0	3/12	0	0	3/12
1	1/12	0	0	0	1/12
2	0	0	3/12	0	3/12
3	0	1/12	0	0	1/12
4	0	0	0	3/12	3/12
5	0	0	1/12	0	1/12
g(x)	1/12	4/12	4/12	3/12	1

6.– A partir de la tabla siguiente calcular:

a) $P(x=3 / x=y)$

b) $P(x=5 / x \geq 5)$

c) $P(x=1 / x<6-y)$

y \ x	1	3	5	h(y)
1	1/9	2/9	0	3/9
3	0	2/9	1/9	3/9
5	2/9	0	1/9	3/9
g(x)	3/9	4/9	2/9	1

a) Calculo $P(x=3/x=y)$

$$P(x=3/x=y) = \frac{P(x=3, y=3)}{P(x=1, y=1) + P(x=3, y=3) + P(x=5, y=5)} = \frac{2/9}{1/9 + 2/9 + 1/9}$$

$P(x=3|x=y) = 1/2$

b) Calculo $P(x=5 | x \geq 5)$

$$P(x=5, x\geq y) = \frac{P(x=5,y=5)+P(x=5,y=3)+P(x=5,y=1)}{P(x=1,y=1)+P(x=3,y=1)+P(x=3,y=3)+P(x=5,y=1)+P(x=5,y=3)+P(x=5,y=5)}$$

$$P(x=5, x\geq y) = \frac{1/9 + 1/9 + 0}{1/9 + 2/9 + 2/9 + 0 + 1/9 + 1/9} \Rightarrow \underline{P(x=5, x\geq y) = 2/7}$$

c) Calculo $P(x=1 \mid x< 6-y)$:

$$P(x=1 \mid x<6-y) = \frac{P(x=1,y=1)+P(x=1,y=3)}{P(x=1,y=1)+P(x=1,y=3)+P(x=3,y=1)} = \frac{1/9 + 0}{1/9 + 0 + 2/9}$$

$\underline{P(x=1 \mid x<6-y) = 1/3}$.

7.- ¿Es $f(x) = \begin{cases} 2/3(2+x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ auténtica función de densidad?

Compruebo si "$f(x)$" es auténtica función de densidad, para lo cual ha de cumplir las siguientes condiciones:

1ª Condición: $f(x)\geq 0$.

Si $x<0 \Rightarrow f(x)=0$

Si $x=0 \Rightarrow f(x)=0$ $\Rightarrow$ Cumple la 1ª condición

Si $x=1 \Rightarrow f(1)=2$

Si $x>1 \Rightarrow f(x)=0$

2ª Condición: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2/3(2+x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (2+x)dx = \frac{2}{3}\left[2x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$= \frac{2}{3}\left(2+1/2-0\right) = 2/3 \cdot 5/2 = 5/3 \Rightarrow$ <u>No cumple la 2ª condición.</u>

<u>No es una auténtica función de densidad.</u>

8.- ¿Es $f(x)=\begin{cases} x+1/2 & 1\le x\le 3 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$ auténtica función de densidad?

Compruebo si $f(x)$ es auténtica función de densidad.

1ª Condición: $f(x)\ge 0$

Si $x<1 \Rightarrow f(x)=0$

Si $x=1 \Rightarrow f(x)=3/2$ ⇒ Cumple la 1ª condición.

Si $x=3 \Rightarrow f(x)=7/2$

Si $x>3 \Rightarrow f(x)=0$

2ª Condición: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{3}(x+1/2)\,dx + \int_{3}^{\infty} 0\,dx = \int_{1}^{3}(x+1/2)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 5 \Rightarrow$$ No cumple la 2ª condición

No es auténtica función de densidad.

9.- Determinar "C" para que $f(x)=\begin{cases} (1-x^2)/C & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$ sea auténtica función de densidad.

Determinamos "C" para que sea $f(x)$ una auténtica función de densidad.

1ª Condición: $f(x)\ge 0$.

Si $x<0 \Rightarrow f(x)=0$

Si $x=0 \Rightarrow f(x)=(1-x^2)/C \Rightarrow f(0)=1/C \Rightarrow C>0$ — Si $C>0$ se cumple la 1ª condición.

Si $x=1 \Rightarrow f(x)=0$.

Si $x>1 \Rightarrow f(x)=0$

2ª Condición: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1}(1-x^2)/C\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx = \frac{1}{C}\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{C}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)_0^1$$

$1/c\,(1-1/3)=1 \Rightarrow c = 1-1/3 \Rightarrow \underline{c = 2/3}$

10.- Dada la variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de densidad

$$f(x)\begin{cases} 2x & \text{para} \quad 0<x<1. \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Calcular: a) La función de distribución de la variable aleatoria X.

b) Las probabilidades: $P(x=0'75)$; $P(-1<x\leq 0'75)$, $P(0'3\leq x\leq 0'8)$.

a) Calculo la función de distribución de la variable aleatoria X.

- Si $x\leq 0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx \;;\; F(x)=0.$$

- Si $0<x<1$:

$$F(x)=\int_{0}^{x} f(x)\,dx=\int_{0}^{x} 2x\,dx= 2\frac{x^2}{2}\Big]_0^x \;;\; F(x)=x^2$$

- Si $x\geq 1$:

$$F(x)=\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} 2x\,dx= 2\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 \;;\; F(x)=1$$

$$F(x)\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 1 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

b) Calculo: $P(x=0'75)$

$\underline{P(x=0'75)=0.}$ (es 1 variable continua)

$P(-1<x\leq 0'75)$

$$P(-1<x\leq 0'75)=\int_{-1}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{0'75} 2x\,dx= 2\frac{x^2}{2}\Big]_0^{0'75}=(0'75)^2$$

$\underline{P(-1<x\leq 0'75)=0'5625}$

$P(0'3 \leq x \leq 0'8)$:

$$P(0'3 \leq x \leq 0'8) = \int_{0'3}^{0'8} 2x\,dx = \left.\frac{2x^2}{2}\right]_{0'3}^{0'8} = (0'8)^2 - (0'3)^2;$$

$P(0'3 \leq x \leq 0'8) = 0'55$.

11.- Dada la variable aleatoria X de la que sabemos que $P(x_1 = 0) = 1/3$ y $P(x_2 = 1) = 2/3$. Determinar:

a) La función de distribución.

b) Las probabilidades $P(x > 1)$; $P(x \leq 2'4)$; $P(x = 0'5)$; $P(-2 \leq x \leq 0'5)$.

a) Calculo la función de distribución:

Si $x < 0$ $F(x) = 0$

Si $0 \leq x < 1$ $F(x) = P(x \leq x_1) = 1/3$

Si $1 \leq x$ $F(x) = P(x \leq 1) = 1$

$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

b) Calculo: $P(x > 1) = 0$

$P(x \leq 2'4) = 1$

$P(x = 0'5) = 0$

$P(-2 < x \leq 0'5) = P(-2 < x < 0) + P(x = 0) + P(0 < x < 0'5) = 0 + 1/3 + 0$

$P(-2 < x \leq 0'5) = 1/3$

12.- Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x;y)\begin{cases} 4/3\ (x+xy) & \text{si}\quad 0\leq x\leq 1;\ 0\leq y\leq 1. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular $P(x<0'5;\ y<0'5)$.

Calculo $P(x<0'5;\ y<0'5)$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{0'5}\int_{-\infty}^{0'5} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{0}^{0'5}\int_{0}^{0'5}\left[4/3\,(x+xy)\right]dx\,dy$$

$$=\frac{4}{3}\int_{0}^{0'5}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^2y}{2}\right]_{0}^{0'5}dy=\frac{4}{3}\int_{0}^{0'5}\left(1/8+y/8\right)dy=\frac{4}{3}\left(\left[\frac{y}{8}+\frac{y^2}{16}\right]_{0}^{0'5}\right)=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{16}\ \frac{5}{4}\right]=\underline{0'11}$$

13.- Dada la variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de densidad

Ejercicio 18.

Cada posible solución de cuatro elementos es una sucesión ordenada de [illegible]. Estos elementos pueden repetirse. Importa el orden.

{ _ , _ , _ , _ } ← Con dados iguales.

a) VR_6^4.

b) En 6. (pq. hay 6 elementos ≠).

c) 1º me fijo en la composición: {3,3,3,1}

Puedo tener 6 nºs repetidos 3 veces y estos pueden aparecer junto [illegible] 5

2º me fijo en el orden:

$6 \cdot 5 \; PR_4^{3,1}$.

d) { [_ , _] , [_ , _] }

~~$6 \cdot 5 \cdot PR_4^{2,2}$.~~

$C_6^2 \cdot PR_4^{2,2}$.

{1,1,2,2}
{2,2,1,1} > Si sólo importa el contenido idénticas ambas parejas.

⇓ son iguales

{1,1} {2,2} {2,2}{1,1}
{3,3} {3,3}
⋮ ⋮
{6,6} {6,6}

→ En el c) un bloque tiene 3 elementos repetidos mientras que en el d) hay bloques de 2 elementos cada uno ⇒ No se pueden argumentar del mismo modo.

e) { [_ , _] , _ , _ }

~~$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot PR_4^{2,1,1}$~~

$6 \cdot C_5^2 \; PR_4^{2,1,1}$

{3,3,2,1} {3,3,2,1}
{2,2,3,1} {2,3,3,1} > Son iguales.

↳ me importa el contenido pero no el orden.

f) $V_4^{\prime 4}$

¿Cómo saber si he hecho el problema bien?

La suma de todos los resultados del apartado b) al f) tiene que ser igual al resultado del apartado a)

El mismo problema pero con 1 dado rojo, otro verde, otro amarillo y otro marrón. Es decir: los cuatro dados son ≠ entre sí.

Tengo 6 · 4 = 24 elementos.
↙ nºs ↘ dados

No se puede argumentar con 24 elementos pq. si tú lanzas los dados cada vez obtendrás 1 nº rojo, 1 nº verde, 1 nº amarillo y otro marrón.

No existe ninguna diferencia entre este caso (R, V, A, M) y el planteado anteriormente. La única diferencia es en el orden en el que pueden aparecer los dados de los ≠ colores

→ Si sólo me importa el orden: P_4, el problema se resolvería multiplicando cada uno de los resultados obtenidos por P_4.

Ejemplos para tablas. (Tema 6)

Ⓐ Calcular la probabilidad de que $x=2$ si v.a $X \sim B(\overset{n}{3},\overset{p}{0'4})$

- En la tabla 2 → 0'2880 , $P[x=2] = 0'2880$

Ⓑ Calcular $P[x=1]$. Si v.a $X \sim B(3, 0'9)$

* el 0'9 no está en la tabla, entonces:

Si $p > 0'5$

$x=1$ $(n-x) = 2$
$p = 0'9$ $(1-p) = 0'1$ } $P[x=2]$ para $n=3$, $p=0'1$ } $P[x=2] = 0'0270$.

$P[x=1]$ cuando v.a. $x \sim B(3, 0'9) = 0'0270$

Ⓒ Calcular $P[x \geq 2]$ si v.a. $x \sim B(3, 0'4)$

Tabla 4

$P[x \geq 2]$ v.a. $x \sim B(3, 0'4) = 0'3520$

Ⓓ Calcular $P[x \geq 1]$ si v.a $x \sim B(3, 0'9)$.

* el 0'9 no está en la tabla.

Si $p > 0'5$:

$x=1$ $(n-x+1) = 3$
$p=0'9$ $(1-p) = 0'1$ } $1 - P[x \geq 1] = 0'0010 = P[x \geq 3]$ v.a $x \sim B(3, 0'1)$

$P[x \geq 1]$ si v.a. $x \sim B(3, 0'9) = 1 - 0'0010 = 0'999$

EJEMPLOS

EJEMPLO 1

1º se define la v.a.

'x': nº individuos que van a vivir dentro de 30 años.

es binomial → sólo hay 2 resultados posibles: vivir o morir.
los sucesos son independientes.
la probabilidad de todos los individuos es la misma 3/5 = 0'6.

a) viven los 5 individuos:

$x = 5$, $n = 5$, $p = 0'6$; $P > 0'5$

$x \to n - x : 5 - 5 = 0$

$p \to 1 - p : 1 - 0'6 = 0'4$

$P[x=0]$ v.a $x \sim B(5, 0'4)$

$P[x=5]$ v.a $x \sim B(5, 0'6) = 0'0778$

b) viven 2 individuos_

$x = 2$, $n = 5$, $p = 0'6$; $P > 0'5$

$x \to n - x : 5 - 2 = 3$

$p \to 1 - p = 1 - 0'6 = 0'4$

$P[x=3]$ v.a $x \sim B(5, 0'4)$

$P[x=2]$ v.a $x \sim B(5, 0'6) = 0'2304$

EJEMPLO 2

v.a "x": poseer dicha característica (nº de elementos que poseen la característica)

$n = 4$

$x = 2$

$p = 0'2$

$P[x=2]$ v.a $x \sim B(4, 0'2) = 0'1536$

Binomial:
- sólo 2 respuestas posibles.
- no son independientes: la probabilidad del 2º elemento de poseer esa característica dependerá de que el sacado anterior/ la tenga o no./ Pero como 500 es un Nº suficiente/ grande podemos decir que "p" es cte para todos ellos.

Si $n > 20$ ⇒ las probabilidades no están en las tablas, pero hay un método que es aproximar.